JOURNAL OF APPROXIMATION THEORY 31, 325–343 (1981)

Sur l'approximation de fonctions intégrables sur [0, 1] par des polynômes de Bernstein modifies

MARIE MADELEINE DERRIENNIC

Laboratoire d'Analyse Numérique, Institut National des Sciences Appliquees 20, avenue des Buttes de Coësmes, 35043 Rennes Cédex, France

Communicated by R. Bojanic

Received December 5, 1979

We study here a new kind of modified Bernstein polynomial operators on $L^1(0, 1)$ introduced by J. L. Durrmeyer in [4]. We define for f integrable on $[0, 1]$ the modified Bernstein polynomial $M_n f$: $M_n f(x) = (n+1) \sum_{k=0}^{n} p_{nk}(x) \int_0^1 p_{nk}(t) f(t)\, dt$. If the derivative $d^r f/dx^r$ with $r \geqslant 0$ is continuous on $[0, 1]$, $(d^r/dx^r) M_n f$ converge uniformly on $[0, 1]$ and $\sup_{x\in[0,1]} |M_n f(x) - f(x)| \leqslant 2\omega_f(1/\sqrt{n})$ if ω_f is the modulus of continuity of f. If f is in Sobolev space $W^{l,p}(0, 1)$ with $l \geqslant 0$, $p \geqslant 1$, $M_n f$ converge to f in $W^{l,p}(0, 1)$.

I. DÉFINITION ET RÉSULTATS PRÉLIMINAIRES

DÉFINITION I.1. On appelle polynôme de Bernstein modifié de degré n associé à une fonction f intégrable sur $[0, 1]$, le polynôme $M_n f$ défini par:

$$M_n f(x) = (n+1) \sum_{k=0}^{n} p_{nk}(x) \int_0^1 p_{nk}(t) f(t)\, dt,$$

où

$$p_{nk}(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \qquad \text{pour} \quad 0 \leqslant k \leqslant n.$$

On rappelle que le polynôme de Bernstein classique associé à une fonction définie sur $[0, 1]$, de degré n est défini par:

$$B_n f(x) = \sum_{k=0}^{n} p_{nk}(x) f(k/n).$$

Dans cette expression on a remplacé $f(k/n)$ par: $(n+1) \int_0^1 p_{nk}(t) f(t)\, dt$.

Cette définition est adaptée à l'approximation des fonctions intégrables sur

0021-9045/81/040325–19$02.00/0

$[0, 1]$. Elle est à rapprocher de celle des polynômes de Bernstein, Kantorovitch pour une fonction intégrable qui est:

$$P_n f(x) = (n+1) \sum_{k=0}^{n} p_{nk}(x) \int_{k/(n+1)}^{(k+1)/(n+1)} f(t)\, dt.$$

PROPOSITION I.2. *L'opérateur M_n est un opérateur linéaire, positif sur l'espace des fonctions intégrables sur $[0, 1]$ à valeurs réelles. Il conserve les constantes et transforme un polynôme de degré $m \leqslant n$ en un polynôme de degré m.*

Démonstration. L'opérateur M_n étant évidemment linéaire, pour montrer qu'il conserve le degré des polynômes, il suffit de démontrer cette propriété pour le polynôme $f(x) = x^m$ où $m \leqslant n$. A l'aide de la fonction bêta on montre que:

$$\int_0^1 p_{nk}(t)\, dt = 1/(n+1) \qquad \text{pour} \quad k = 0, 1, \ldots, n.$$

On a ainsi pour tout m entier:

$$\int_0^1 p_{nk}(t)\, t^m\, dt = \frac{(k+m)!}{k!} \frac{n!}{(n+m+1)!} \qquad \text{si} \quad k = 0, 1, \ldots, n.$$

Le polynôme $M_n f$ s'écrit alors:

$$M_n f(x) = (n+1) \sum_{k=0}^{n} p_{nk}(x) \frac{(k+m)!}{k!} \frac{n!}{(n+m+1)!}.$$

Or, pour tous réels x et y et tous entiers m et n avec $m \leqslant n$, on a:

$$\frac{\partial^m}{\partial x^m} (x^m (x+y)^n) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \frac{(k+m)!}{k!}.$$

Cette expression est transformée à l'aide de la formule de Leibniz en

$$\sum_{r=0}^{m} \binom{m}{r} \frac{m!}{r!} x^r \frac{n!}{(n-r)!} (x+y)^{n-r}.$$

On pose $y = 1 - x$ et on obtient l'égalité:

$$M_n f(x) = \frac{(n+1)!}{(n+m+1)!} \sum_{r=0}^{m} \binom{m}{r} \frac{m!}{r!} \frac{n!}{(n-r)!} x^r.$$

En particulier si $m = 0$, $M_n f(x) = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$: si $m = 1$ et $x \in [0, 1]$, on obtient $\sum_{k=0}^{n} (k+1)\, p_{nk}(x) = 1 + nx$, et si $m = 2$ et $x \in [0, 1]$, $\sum_{k=0}^{n} (k+1)(k+2)\, p_{nk}(x) = 2 + 4nx + n(n-1)\, x^2$.

II. Etude de $M_n f$ quand f a des propriétés de continuité ou de dérivabilité

Si la fonction f est continue sur $[0, 1]$, on va montrer que la suite $M_n f$ converge uniformément vers f, en donnant une majoration de $\sup_{x\in[0,1]} |M_n f(x) - f(x)|$ à l'aide du module de continuité de f. Une autre démonstration de la convergence uniforme de $M_n f$ vers f a été donnée par Durrmeyer dans [4] sans étudier la rapidité de convergence. On rappelle que le module de continuité de f est défini par:

$$\omega_f(h) = \sup_{\substack{|t|\leqslant h \\ x\in[0,1] \\ x+t\in[0,1]}} |f(x+t) - f(x)|.$$

Lemme II.1.

$$\sup_{x\in[0,1]} \left(\sum_{k=0}^{n} p_{nk}(x) \int_0^1 p_{nk}(t)(t-x)^2\, dt \right) = \frac{1}{2(n+2)(n+3)} \quad \text{pour} \quad n \geqslant 3.$$

Démonstration. Les identités du paragraphe I nous donnent, pour tout $x \in [0, 1]$:

$$\sum_{k=0}^{n} p_{nk}(x) \int_0^1 p_{nk}(t))(t-x)^2\, dt$$

$$= \sum_{k=0}^{n} p_{nk}(x) \left(\frac{(k+2)(k+1)}{(n+3)(n+2)(n+1)} - 2x \frac{k+1}{(n+2)(n+1)} + \frac{x^2}{n+1} \right)$$

$$= \frac{1}{n+1} \left(\frac{2 + 4nx + n(n-1)\,x^2}{(n+2)(n+3)} - 2x \frac{(nx+1)}{n+2} + x^2 \right)$$

$$= \frac{2nx(1-x) - 6x(1-x) + 2}{(n+1)(n+2)(n+3)}.$$

Dès que $n \geqslant 3$, cette quantité est maximum pour $x = \frac{1}{2}$, d'où:

$$\sup_{x\in[0,1]} \left(\sum_{k=0}^{n} p_{nk}(x) \int_0^1 p_{nk}(t)(t-x)^2\, dt \right) = \frac{1}{2(n+2)(n+3)}.$$

Théorème II.2. *Pour toute fonction f continue sur $[0, 1]$, la suite $M_n f$ converge uniformément sur $[0, 1]$ et:*

$$\sup_{x\in[0,1]} |M_n f(x) - f(x)| \leqslant 2\omega_f(1/\sqrt{n}), \qquad \textit{pour } n \geqslant 3.$$

Démonstration. Ce résultat est une conséquence immédiate du Lemme II.1 et du Théorème II.3 de Shisha et Mond [6] suivant:

THÉORÈME II.3. *Pour toute suite d'opérateurs linéaires positifs L_n définis sur l'espace des fonctions continues sur $[a, b]$, à valeur dans cet espace, vérifiant $L_n(1, \cdot) = 1$, nous avons*:

$$\sup_{x \in [a,b]} |L_n(f, x) - f(x)| \leqslant 2\omega_f(\mu_n),$$

pour toute fonction f continue sur $[a, b]$, où $\mu_n^2 = \sup_{x \in [a,b]} (L_n(\cdot - x)^2, x)$.

PROPOSITION II.3. *Soit la fonction $T_{n,m}$ définie sur $[0, 1]$, pour tous entiers m et n, par*

$$T_{n,m}(x) = \sum_{k=0}^{n} p_{nk}(x) \int_0^1 p_{nk}(t)(x - t)^m \, dt.$$

(1) *$T_{n,m}(x)$ est un polynôme en x de degré m.*

(2) *$T_{n,m}(x)$ est une fraction rationnelle en n, la différence entre le degré du dénominateur et le degré du numérateur étant: $m/2 + 1$ si m est pair, et $(m + 1)/2 + 1$ si m est impair.*

(3) *$T_{n,2m}(x)$ est un polynôme en $x(1 - x)$ et est uniformément équivalent quand $n \to \infty$ à*

$$\frac{1}{n^{m+1}} \frac{(2m)!}{m!} (x(1 - x))^m.$$

(4) *$T_{n,2m-1}(x)$ est un polynôme en $x(1 - x)$ multiplié par $(1 - 2x)$ et est uniformément équivalent quand $n \to \infty$ à*:

$$-\frac{1}{n^{m+1}} \frac{(2m)!}{2 \cdot (m - 1)!} (1 - 2x)(x(1 - x))^{m-1}.$$

Démonstration. On a

$$T'_{n,m}(x) = \sum_{k=0}^{n} p'_{nk}(x) \int_0^1 p_{nk}(t)(x - t)^m \, dt + mT_{n,m-1}(x).$$

Puisque $x(1 - x)\, p'_{nk}(x) = p_{nk}(x)(k - nx)$ pour $0 \leqslant k \leqslant n$, on écrit:

$$\begin{aligned} x(1 - x) &\sum_{k=0}^{n} p'_{nk}(x) \int_0^1 p_{nk}(t)(x - t)^m \, dt \\ &= \sum_{k=0}^{n} p_{nk}(x) \int_0^1 t(1 - t)\, p'_{nk}(t)(x - t)^m \, dt - nT_{n,m+1}(x). \end{aligned}$$

On obtient donc en utilisant l'égalité $t(1-t) = -(x-t)^2 - (1-2x)(x-t) + x(1-x)$, vraie pour tout $x \in [0, 1]$ et $t \in [0, 1]$, puis en intégrant par parties:

$$\begin{aligned}
nT_{n,m+1}(x) &- x(1-x)[mT_{n,m-1}(x) - T'_{n,m}(x)] \\
&= \sum_{k=0}^{n} p_{nk}(x) \int_0^1 (-(x-t)^2 - (1-2x)(x-t) \\
&\quad + x(1-x))\, p'_{nk}(t)(x-t)^m \, dt \\
&= \sum_{k=0}^{n} p_{nk}(x) \int_0^1 p_{nk}(t)[-(m+2)(x-t)^{m+1} \\
&\quad - (1-2x)(m+1)(x-t)^m + x(1-x)\, m(x-t)^{m-1}]\, dt \\
&= -(m+2)\, T_{n,m+1}(x) - (m+1)(1-2x)\, T_{n,m}(x) + mx(1-x)\, T_{n,m-1}(x).
\end{aligned}$$

Nous avons donc la relation de récurrence:

$$\begin{aligned}
(n+m+2)\, T_{n,m+1}(x) = x(1-x)[2mT_{n,m-1}(x) - T'_{n,m}(x)] \\
- (1-2x)(m+1)\, T_{n,m}(x),
\end{aligned}$$

qui permet d'établir toutes les propriétés du théorème. En fait, c'est le corollaire suivant que nous utiliserons dans la suite:

COROLLAIRE II.4. *$n^{m+1}T_{n,2m}(x)$ est, pour tout entier m, borné uniformément en n et x.*

THÉORÈME II.5. *Si f est intégrable, bornée sur $[0, 1]$ et admet une dérivée seconde au point $x \in [0, 1]$:*

$$\lim_{n\to\infty} n(M_n f(x) - f(x)) = (1-2x)\, f'(x) + x(1-x)\, f''(x).$$

De plus, cette limite est uniforme si f'' est continue sur $[0, 1]$.

Démonstration. La formule de Taylor au point x s'écrit:

$$f(t) = f(x) + (t-x)\, f'(x) + [(t-x)^2/2]\, f''(x) + (t-x)^2\, \varepsilon(t-x)$$

où $\varepsilon(u) \to_{u\to 0} 0$ et ε est une fonction intégrable, bornée sur $[-x, 1-x]$.

La linéarité de M_n et les identités du paragraphe I nous permettent d'écrire:

$$\begin{aligned}
M_n f(x) = f(x) + f'(x) \left(\frac{nx+1}{n+2} - x\right) \\
+ \frac{f''(x)}{2} \frac{(2n-6)\, x(1-x) + 2}{(n+2)(n+3)} + E(n, x)
\end{aligned}$$

où

$$E(n,x)=(n+1)\sum_{k=0}^{n} p_{nk}(x)\int_0^1 p_{nk}(t)(t-x)^2\,\varepsilon(t-x)\,dt.$$

Pour démontrer qu'on a l'expression asymptotique cherchée, il suffit de montrer que $nE(n,x)\to_{n\to\infty} 0$.

Posons $M=\sup_{u\in[-x,1-x]}|\varepsilon(u)|$ et pour $\varepsilon>0$ arbitraire, soit $\delta>0$, tel que $|\varepsilon(u)|<\varepsilon$ dès que $|u|<\delta$.

Pour tout $t\in[0,1]$, on a $|\varepsilon(t-x)|<\varepsilon+M(t-x)^2/\delta^2$ et donc:

$$\begin{aligned}E(n,x)&\leqslant(n+1)\,\varepsilon\sum_{k=0}^{n} p_{nk}(x)\int_0^1 p_{nk}(t)(t-x)^2\,dt\\&\quad+(n+1)(M/\delta^2)\sum_{k=0}^{n} p_{nk}(x)\int_0^1 p_{nk}(t)(t-x)^4\,dt\\&\leqslant\frac{(n+1)\,\varepsilon}{2(n+2)(n+3)}+\frac{K}{\delta^2n^3},\end{aligned}$$

où K est une constante d'après la Proposition II.3. Donc, pour n assez grand, on a: $|nE(n,x)|<\varepsilon$. Ce résultat signifie que si f admet une dérivée seconde en x, on a $|M_nf(x)-f(x)|=O(1/n)$.

Si f'' est continue sur $[0,1]$, notons $\omega_{f''}$ le module de continuité de f''. On a $|\varepsilon(t-x)|\leqslant\omega_{f''}(|t-x|)\leqslant(1+|t-x|/\delta)\,\omega_{f''}(\delta)$ pour tout $\delta>0$.

On utilise l'inégalité de Schwarz sur les sommes et les intégrales pour obtenir:

$$\begin{aligned}|E(n,x)|&\leqslant\omega_{f''}(\delta)\Bigg[(n+1)\sum_{k=0}^{n} p_{nk}(x)\int_0^1 p_{nk}(t)(x-t)^2\,dt\\&\quad+\frac{n+1}{\delta}\sum_{k=0}^{n} p_{nk}(x)\int_0^1 p_{nk}(t)\,|t-x|^3\,dt\Bigg]\\&\leqslant\omega_{f''}(\delta)\Bigg[\frac{n+1}{2(n+2)(n+3)}+\frac{(n+1)}{\delta}\\&\quad\times\left(\sum_{k=0}^{n} p_{nk}(x)\int_0^1 p_{nk}(t)(t-x)^2\,dt\right)^{1/2}\\&\quad\times\left(\sum_{k=0}^{n} p_{nk}(x)\int_0^1 p_{nk}(t)(t-x)^4\,dt\right)^{1/2}\Bigg]\\&\leqslant\omega_{f''}(\delta)\left[\frac{n+1}{2(n+2)(n+3)}+\frac{n+1}{\delta}\left(\frac{1}{2(n+2)(n+3)}\,\frac{K}{n^3}\right)^{1/2}\right].\end{aligned}$$

En prenant $\delta = 1/\sqrt{n}$ on obtient:

$$|nE(n, x)| \leqslant \omega_{f''}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\left[\frac{1}{2} + \frac{K^{1/2}}{\sqrt{2}}\right]$$

et $nE(n, x)$ converge uniformément vers 0, d'où le résultat énoncé.

Seules les fonctions $f(x) = A \log(x/1 - x) + B$ où A et B sont des rèels vérifient

$$|M_n f(x) - f(x)| = o(1/n).$$

On rappelle que les polynômes de Bernstein classiques sont tels que:

$$\lim_{n \to \infty} n(B_n f(x) - f(x)) = -x(1 - x)/2 f''(x)$$

si $f''(x)$ existe (Voronowska [8]).

THÉORÈME II.6. *Si f est intégrable, bornée et admet une dérivée d'ordre r en $x \in [0, 1]$*:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{d^r}{dx^r} M_n f(x) = \frac{d^r}{dx^r} f(x).$$

Démonstration. Nous utiliserons le lemme suivant emprunté à Lorentz [5, p. 26].

LEMME II.7. *Il existe des polynômes $q_{i,j,r}$ définis sur $[0, 1]$ pour i, j, r entiers vérifiant $i \geqslant 0, j \geqslant 0, 2i + j \leqslant r$, tels que*:

$$\frac{d^r}{dx^r} x^k(1 - x)^{n-k} = Q_{n,r,k}(x)\, x^{k-r}(1 - x)^{n-k-r}$$

pour tous k et r où: $Q_{n,r,k}(x) = \sum_{i,j} n^i(k - nx)^j\, q_{i,j,r}(x)$, la somme étant prise sur l'ensemble $i \geqslant 0, j \geqslant 0, 2i + j \leqslant r$.

Démonstration du Théorème II.6. On démontre d'abord que $(d^r/dx^r)\, M_n f(x)$ peut toujours se mettre sous la forme:

$$\frac{d^r}{dx^r} M_n f(x) = \frac{(n + 1)!\, n!}{(n - r)!\, (n + r)!} \sum_{q=0}^{n-r} p_{n-r,q}(x) \times \int_0^1 \frac{d^r}{dt^r} p_{n+r,q+r}(t)(-1)^r f(t)\, dt$$

La formule de Leibniz nous donne:

$$\frac{d^r}{dx^r} M_n f(x) = \frac{(n+1)!}{(n-r)!} \sum_{j=0}^{r} \binom{r}{j} \sum_{k=j}^{n-r+j} p_{n-r,k-j}(x)$$
$$\times (-1)^{r-j} \int_0^1 p_{nk}(t) f(t)\, dt.$$

En changeant l'indice de sommation, on obtient:

$$\frac{d^r M_n f(x)}{dx^r} = \frac{(n+1)!}{(n-r)!} \sum_{k=0}^{n-r} p_{n-r,k}(x)$$
$$\times \int_0^1 \sum_{j=0}^{r} \binom{r}{j} (-1)^{r-j} p_{n,k+j}(t) f(t)\, dt.$$

La formule de Leibniz nous permet d'écrire:

$$\frac{d^r}{dt^r} p_{n+r,k+r}(t) = \frac{(n+r)!}{n!} \sum_{j=0}^{r} \binom{r}{j} (-1)^j p_{n,k+j}(t).$$

On obtient ainsi l'expression que l'on avait annoncée.
On écrit le développement de Taylor de f au voisinage de x, à l'ordre r:

$$f(t) = f(x) + (t-x) f'(x) + \cdots + \frac{(t-x)^r}{r!} \frac{d^r}{dx^r} f(x) + (t-x)^r \varepsilon(t-x)$$

où $\varepsilon(u) \to_{u \to 0} 0$ et ε est une fonction intégrable, bornée par M. On définit

$$R(t) = f(x) + (t-x) f'(x) + \cdots + \frac{(t-x)^r}{r!} \frac{d^r}{dx^r} f(x).$$

En intégrant r fois par parties, on obtient:

$$\frac{d^r}{dx^r} M_n R(x) = \frac{(n+1)!\, n!}{(n-r)!\, (n+r)!} \sum_{k=0}^{n-r} p_{n-r,k}(x)$$
$$\times \int_0^1 p_{n+r,k+r}(t) \frac{d^r}{dt^r} R(t)\, dt.$$

D'après la définition de R on a:

$$\frac{d^r}{dt^r} R(t) = \frac{d^r}{dx^r} f(x),$$

pour tout $t \in [0, 1]$ et donc:

$$\frac{d^r}{dx^r} M_n R(x) = \frac{(n+1)!\, n!}{(n-r)!\,(n+r+1)!} \frac{d^r}{dx^r} f(x) \xrightarrow[n \to \infty]{} \frac{d^r}{dx^r} f(x).$$

Pour démontrer le théorème, il suffit donc maintenant de montrer que $(d^r/dx^r)\, M_n(f-R)(x) \to_{n\to\infty} 0$. Posons $g = f - R = (t-x)^r\, \varepsilon(t-x)$.

On utilise d'abord le Lemme II.7:

$$x^r(1-x)^r \frac{d^r}{dx^r} M_n\, g(x)$$
$$= (n+1) \sum_{i,j} n^i q_{i,j,r}(x) \sum_{k=0}^{n} (k-nx)^j\, p_{nk}(x) \int_0^1 p_{nk}(t)\, g(t)\, dt,$$

la somme en (i, j) étant prise sur $i \geqslant 0$, $j \geqslant 0$ et $2i + j \leqslant r$. On pose $M' = \sup_{x\in[0,1]} \sup_{2i+j\leqslant r} |q_{i,j,r}(x)|$.

On majore cette quantité à l'aide de l'inégalité de Schwarz sur les sommes finies.

$$\left| x^r(1-x)^r \frac{d^r}{dx^r} M_n\, g(x) \right| \leqslant M'(n+1) \sum_{i,j} n^i \left(\sum_{k=0}^{n} (k-nx)^{2j}\, p_{nk}(x) \right)^{1/2}$$
$$\times \left(\sum_{k=0}^{n} p_{nk}(x) \left(\int_0^1 p_{nk}(t)\, g(t)\, dt \right)^2 \right)^{1/2}.$$

Nous utiliserons la propriété connue (voir Lorentz [4]):

$$\frac{1}{n^j} \sup_{x\in[0,1]} \left(\sum_{k=0}^{n} (k-nx)^{2j}\, p_{nk}(x) \right)$$

est borné pour tout entier j.

Pour majorer la deuxième somme du produit, on considère pour tout $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ tel que $|u| < \delta$ entraîne $|\varepsilon(u)| < \varepsilon$. On écrit alors, en utilisant l'inégalité de Schwarz et la majoration

$$(\varepsilon(t-x))^2 \leqslant \varepsilon^2 + (M^2/\delta^2)(t-x)^2$$

$$\left(\int_0^1 p_{nk}(t)\, g(t)\, dt \right)^2 \leqslant [1/(n+1)] \int_0^1 p_{nk}(t)\, |g(t)|^2\, dt$$
$$\leqslant [1/(n+1)]\, \varepsilon^2 \int_0^1 (t-x)^{2r}\, p_{nk}(t)\, dt$$
$$+ (M^2/\delta^2) \int_0^1 (t-x)^{2r+2}\, p_{nk}(t)\, dt.$$

En utilisant la Proposition II.3, on obtient si n est assez grand:

$$\sum_{k=0}^{n} p_{nk}(x) \left(\int_0^1 p_{nk}(t)\, g(t)\, dt\right)^2 = \varepsilon^2 O(1/n^{r+2}).$$

Nous obtenons alors:

$$\left| x^r(1-x)^r \frac{d^r}{dx^r} M_n\, g(x) \right|$$

$$= M\varepsilon(n+1) \sum_{2i+j \leqslant r} n^{i+j/2} O\left(\frac{1}{n^{r/2+1}}\right) \leqslant K\varepsilon,$$

où K est une constante. Cette propriété étant vraie pour tout $\varepsilon > 0$, nous obtenons le résultat cherché.

THÉORÈME II.8. *Si f admet une dérivée d'ordre r continue sur* $[0, 1]$, *la suite* $(d^r/dx^r)\, M_n f$ *converge uniformément vers* $(d^r/dx^r) f$ *et*

$$\sup_{x \in [0,1]} \left| \frac{(n+r+1)!\,(n-r)!}{(n+1)!\, n!} \frac{d^r}{dx^r} M_n f(x) - \frac{d^r}{dx^r} f(x) \right| \leqslant K_r \omega_{f^{(r)}}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right),$$

où K_r est une constante indépendante de f et de n, et $\omega_{f^{(r)}}$ le module de continuité de $(d^r/dx^r) f$.

Démonstration. Si f admet une dérivée d'ordre r continue sur $[0, 1]$, on a, après r intégrations par parties:

$$\frac{d^r}{dx^r} M_n f(x) = \frac{(n+1)!\, n!}{(n-r)!\,(n+r)!} \sum_{k=0}^{n-r} p_{n-r,k}(x)$$

$$\times \int_0^1 p_{n+r,k+r}(t) \frac{d^r}{dt^r} f(t)\, dt.$$

Les relations sur les p_{nk} permettent d'écrire:

$$\left| \frac{(n+r+1)!\,(n-r)!}{(n+1)!\, n!} \frac{d^r}{dx^r} M_n f(x) - \frac{d^r}{dx^r} f(x) \right|$$

$$\leqslant (n+r+1) \sum_{k=0}^{n-r} p_{n-r,k}(x) \int_0^1 p_{n+r,k+r}(t)$$

$$\times \left| \frac{d^r}{dt^r} f(t) - \frac{d^r}{dx^r} f(x) \right| dt$$

et, comme dans la démonstration du Théorème II.2, on majore cette quantité à l'aide du module de continuité de $(d^r/dx^r)f$ par:

$$\omega_{f^{(r)}}(\delta)\left[1+\sqrt{n+r+1}/\delta\left(\sum_{k=0}^{n-r} p_{n-r,k}(x)\int_0^1 p_{n+r,k+r}(t)(t-x)^2\,dt\right)^{1/2}\right],$$

où δ est un réel qu'on prend égal à $1/\sqrt{n}$. On vérifie que

$$\sup_{x\in[0,1]}\left|\sum_{k=0}^{n-r} p_{n-r,k}(x)\int_0^1 p_{n+r,k+r}(t)(t-x)^2\,dt\right| = O(1/n^2)$$

et on obtient la majoration cherchée.

La convergence uniforme de $(d^r/dx^r)M_nf$ vers $(d^r/dx^r)f$ se déduit de ce résultat parce que

$$\frac{(n+r+1)!\,(n-r)!}{(n+1)!\,n!}\xrightarrow[n\to\infty]{}1$$

et $(d^r/dx^r)f(x)$ est bornée sur $[0,1]$.

III. Etude de M_nf quand f est intégrable

Dans ce paragraphe, nous montrons que les polynômes de Legendre sont les vecteurs propres de M_n et en déduisons une nouvelle expression de M_nf, qu'on obtient alors par un procédé de sommation à partir des sommes partielles des séries de Legendre, de façon analogue aux sommes de Fejer pour les séries de Fourier (Timan [7]). Ce résultat est spécifique aux opérateurs de Bernstein modifiés M_n, en effet, l'opérateur de Bernstein classique et l'opérateur de Bernstein–Kantorovitch, de degrés n, admettent chacun un système complet de vecteurs propres, mais celui-ci dépend de n.

Proposition III.1. *Soit H un espace de Hilbert et soit H_m une suite croissante de sous-espaces de H tels que* $\dim H_m = m$ *pour tout entier m.*

Soit L un opérateur défini sur H tel que $L(H_m)\subset H_m$ et $L^*(H_m)\subset H_m$ (L^* étant l'adjoint de L) pour tout entier m. Alors la suite orthogonale $(V_m)_{m\in\mathbb{N}}$ définie par $V_m\in H_m$, $V_m\perp H_{m-1}$, $\|V_m\|=1$ est une suite de vecteurs propres de L, (les valeurs propres associées aux V_m pouvant être nulles).

Démonstration. Soit $W\in H_{m-1}$, quelconque. On a $\langle LV_m, W\rangle_H = \langle V_m, L^*W\rangle_H = 0$ car L^* laisse H_{m-1} invariant; il en résulte que LV_m, qui est dans H_m, est orthogonal à H_{m-1}, il est donc colinéaire à V_m.

LEMME III.2. *Si f et g sont deux fonctions intégrables sur* $[0, 1]$:

$$\int_0^1 M_n f(x)\, g(x)\, dx = \int_0^1 f(t)\, M_n\, g(t)\, dt$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. En particulier M_n est un opérateur auto adjoint sur $L^2(0, 1)$.

Démonstration. Si f et g sont deux fonctions intégrables sur $[0, 1]$:

$$\int_0^1 M_n f(x)\, g(x)\, dx = (n+1) \sum_{k=0}^{n} \int_0^1 p_{nk}(x)\, g(x)\, dx \int_0^1 p_{nk}(t)\, f(t)\, dt$$

$$= \int_0^1 f(t)\, M_n\, g(t)\, dt.$$

D'où, si f et g sont dans $L^2(0, 1)$, on a:

$$\langle M_n f, g\rangle_{L^2(0,1)} = \langle f, M_n\, g\rangle_{L^2(0,1)}.$$

THÉORÈME III.3. *Les polynômes de Legendre sont les vecteurs propres de M_n pour tout entier $n \in \mathbb{N}$. La valeur propre associée au polynôme de Legendre de degré m est: $\lambda_{n,m} = (n+1)!\, n!/(n+m+1)!\, (n-m)!$ si $m \leqslant n$ et $\lambda_{n,m} = 0$ si $m > n$.*

Démonstration. On utilise la Proposition III.1 en prenant $H = L^2(0, 1)$ et en définissant H_m comme l'espace des polynômes de degré $\leqslant m-1$.

Les conditions de la Proposition III.1 sont vérifiées, en effet M_n est auto adjoint, laisse invariant H_m pour $m < n$ puisqu'il conserve le degré des polynômes de degré $\leqslant n$, il laisse aussi invariant H_m pour $m \geqslant n$ puisqu'il est à valeurs dans l'espace des polynômes de degré $\leqslant n$.

On en déduit que la suite $(V_m)_{m \in \mathbb{N}}$ telle que: $V_m \in H_m$, $V_m \perp H_{m-1}$ et $\|V_m\| = 1$, est une suite de vecteurs propres de M_n pour tout entier n. Cette suite est la suite des polynômes de Legendre normés dans $L^2(0, 1)$, c'est-à-dire:

$$V_{m+1}(x) = \frac{\sqrt{2m+1}}{m!} \frac{d^m}{dx^m} (x^m (1-x)^m).$$

Dans la suite, nous noterons ce polynôme Q_m et la valeur propre qui lui est associée pour l'opérateur M_n, $\lambda_{n,m}$.

Puisque M_n est contractant pour L_∞, on a $|\lambda_{n,m}| \leqslant 1$; et puisque $M_n f$ converge vers f dans L_∞ si f est une fonction continue on a $\lambda_{n,m} \to_{n \to \infty} 1$ pour chaque m fixé. Plus précisément, on a $\lambda_{n,m} = 0$ si $m > n$, car, puisque $\langle M_n Q_m, Q_r\rangle_{L^2} = \langle Q_m, Q_r\rangle_{L^2} \lambda_{n,r} = 0$ si $r \leqslant n$ et $m > n$, $M_n Q_m$ est un polynôme de degré $\leqslant n$ orthogonal à tout polynôme de degré $\leqslant n$, il est donc nul.

Si $m \leqslant n$, puisque M_n conserve le degré des polynômes de degré $\leqslant n$, on obtient $\lambda_{n,m}$, en regardant quelle est l'image de x^m par M_n. L'identité du paragraphe I nous donne:

$$\lambda_{n,m} = \frac{(n+1)\,n!}{(n-m)!\,(n+m+1)!}$$

COROLLAIRE III.4. *Si f est une fonction intégrable sur* $[0, 1]$:

$$M_n f = \sum_{m=0}^{n} \lambda_{n,m} \left(\int_0^1 f(x)\, Q_m(x)\, dx \right) Q_m,$$

où Q_m est le polynôme de Legendre de degré m.

Démonstration. Pour toute fonction f intégrable, $M_n f$ étant un polynôme de degré n, on peut trouver des réels $\alpha_{n,m}(f)$ pour $0 \leqslant m \leqslant n$, tels que:

$$M_n f = \sum_{m=0}^{n} \alpha_{n,m}(f)\, Q_m.$$

Pour $r \leqslant n$ on a, puisque M_n est auto adjoint:

$$\langle M_n f, Q_r \rangle_{L^2(0,1)} = \sum_{m=0}^{n} \alpha_{n,m}(f) \langle Q_m, Q_r \rangle_{L^2(0,1)} = \alpha_{n,r}(f)$$

$$= \int_0^1 f(x)\, M_n Q_r(x)\, dx = \lambda_{n,r} \int_0^1 f(x)\, Q_r(x)\, dx$$

d'où

$$\alpha_{n,m}(f) = \lambda_{n,m} \int_0^1 f(x)\, Q_m(x)\, dx.$$

THÉORÈME III.5. *Pour toute fonction f intégrable sur* $[0, 1]$, *la suite $M_n f$ converge presque partout vers f.*

Démonstration. Soit f une fonction intégrable sur $[0, 1]$. On pose $F(x) = \int_0^x f(t)\, dt$. On va montrer que, si F est dérivable au point $a \in \,]0, 1[$ et si $F'(a) = f(a)$, ce qui est vrai presque partout d'après le théorème de Lebesgue, la suite $M_n f(a)$ converge vers $f(a)$.

Pour tout k, $0 \leqslant k \leqslant n$, le produit $p_{nk}(t)\, F(t)$ est absolument continu et puisque $F'(t) = f(t)$ presque partout, on a pour tout $x \in [0, 1]$:

$$p_{nk}(x)\, F(x) = \int_0^x p'_{nk}(t)\, F(t)\, dt + \int_0^x p_{nk}(t)\, f(t)\, dt.$$

On obtient alors l'expression de $M_n f(a)$:

$$M_n f(a) = (n+1)\, a^n F(1) - (n+1) \sum_{k=0}^{n} p_{nk}(a) \int_0^1 p'_{nk}(t)\, F(t)\, dt.$$

La fonction F étant dérivable en a, nous avons:

$$F(t) = F(a) + (t-a)\, F'(a) + (t-a)\, \varepsilon(t-a)$$

où $\varepsilon(u) \to_{u \to 0} 0$ et $\varepsilon(u)$ est borné.

L'opérateur M_n étant linéaire, il peut se mettre sous la forme:

$$\begin{aligned} M_n f(a) = (n+1)[&(a^n F(1) - a(1-a)\, F'(a) \\ &\times (a^{n-1} + (1-a)^{n-1}) - F(a)(a^n - (1-a)^n] \\ &+ F'(a) - (n+1) \sum_{k=0}^{n} p_{nk}(a) \int_0^1 p'_{nk}(t)(t-a)\, \varepsilon(t-a)\, dt. \end{aligned}$$

Puisque $a \in]0, 1[$, pour montrer que $M_n f(a)$ converge vers $F'(a)$, il suffit de montrer que:

$$E_n(a) = (n+1) \sum_{k=0}^{n} p_{nk}(a) \int_0^1 p'_{nk}(t)(t-a)\, \varepsilon(t-a)\, dt \xrightarrow[n \to \infty]{} 0.$$

On utilise la relation

$$p'_{nk}(t) = (p_{n-1,k-1}(t) - p_{n-1,k}(t))\, n \qquad \text{si} \quad 1 \leqslant k \leqslant n-1.$$

Par un changement d'indice de sommation, on obtient:

$$\begin{aligned} E_n(a) = (n+1)\, n &\sum_{k=0}^{n-1} (p_{n,k+1}(a) - p_{n,k}(a)) \\ &\times \int_0^1 p_{n-1,k}(t)(t-a)\, \varepsilon(t-a)\, dt. \end{aligned}$$

La relation ci-dessus, exprimant $p'_{nk}(t)$, nous donne alors:

$$\begin{aligned} a(1-a)\, E_n(a) = n &\sum_{k=0}^{n-1} p_{n+1,k+1}(a)((n+1)\, a - (k+1)) \\ &\times \int_0^1 p_{n-1,k}(t)(t-a)\, \varepsilon(t-a)\, dt. \end{aligned}$$

L'inégalité de Schwarz sur les sommes finies entraîne:

$$\begin{aligned}(E_n(a)\,a(1-a))^2 &\leqslant n^2\left(\sum_{k=0}^{n-1} p_{n+1,k+1}(a)((n+1)\,a-(k+1))^2\right)\\ &\quad\times\left(\sum_{k=0}^{n-1} p_{n+1,k+1}(a)\left(\int_0^1 p_{n-1,k}(t)(t-a)\,\varepsilon(t-a)\,dt\right)^2\right);\end{aligned}$$

la relation suivante, utilisée couramment dans l'étude des polynômes de Bernstein classiques (Lorentz [4]):

$$\sum_{k=0}^{n} p_{nk}(x)(k-nx)^2 = nx(1-x)$$

entraîne que $(1/n)\sum_{k=0}^{n-1} p_{n+1,k+1}(a)((n+1)\,a-(k+1))^2$ est borné uniformément en n. Pour étudier la deuxième somme, pour $\varepsilon > 0$, on considère $\delta > 0$ tel que $|u| < \delta$ entraîne $|\varepsilon(u)| < \varepsilon$.

On pose $\sup_{u\in[a,1-a]} |\varepsilon(u)| = M$.

L'inégalité de Schwarz et la convexité de $t \to t^2$ donnent:

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{n-1} p_{n+1,k+1}(a)\left(\int_0^1 p_{n-1,k}(t)(t-a)\,\varepsilon(t-a)\,dt\right)^2\\ &\qquad\leqslant (1/n)\sum_{k=0}^{n-1} p_{n+1,k+1}(a)\int_0^1 p_{n-1,k}(t)(t-a)^2\,(\varepsilon(t-a))^2\,dt.\end{aligned}$$

On partage l'intervalle d'intégration en 2 parties, suivant que $|t-a| > \delta$ ou $|t-a| < \delta$.

On obtient ainsi les deux évaluations:

$$\sum_{k=0}^{n-1} p_{n+1,k+1}(a)\int_{\substack{|t-a|<\delta\\ t\in[0,1]}} p_{n-1,k}(t)(t-a)^2\,(\varepsilon(t-a))^2\,dt = \varepsilon^2 O(1/n^2). \qquad (1)$$

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{n-1} p_{n+1,k+1}(a)\int_{\substack{|t-a|<\delta\\ t\in[0,1]}} p_{n-1,k}(t)(t-a)^2\,(\varepsilon(t-a))^2\,dt\\ &\qquad\leqslant \frac{M^2}{\delta^2}\sum_{k=0}^{n-1} p_{n+1,k+1}(a)\int_0^1 p_{n-1,k}(t)(t-a)^4\,dt = \frac{1}{\delta^2}\,O\left(\frac{1}{n^3}\right) \qquad (2)\end{aligned}$$

On obtient, en ajoutant ces deux quantités

$$\sum_{k=0}^{n-1} p_{n+1,k+1}(a)\left(\int_0^1 p_{n-1,k}(t)(t-a)\,\varepsilon(t-a)\,dt\right)^2 = \left(\varepsilon^2+\frac{1}{n\delta^2}\right)O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Si on choisit n assez grand, le résultat obtenu est en $\varepsilon^2 O(1/n^2)$. Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$, on a montré l'inégalité dès que n est assez grand:

$$a(1-a) \sum_{k=0}^{n} p_{nk}(a) \int_0^1 p'_{nk}(t)(t-a)\, \varepsilon(t-a)\, dt \leqslant K\varepsilon,$$

où K est une constante indépendante de n et de ε.

On en déduit que pour un point $a \in]0, 1[$, tel que $F'(a)$ existe, la suite $M_n f(a)$ converge vers $f(a)$. (C'est vrai en particulier si f est continue en a.)

IV. Convergence dans les espaces de Sobolev

Nous étudions maintenant la convergence de $M_n f$ vers f dans l'espace de Sobolev $W^{l,p}(0, 1)$ des fonctions f de $L^p(0, 1)$ dont la dérivée d'ordre r au sens des distributions notée $D^r f$, pour $r \leqslant l$, est dans $L^p(0, 1)$, muni de la norme:

$$\|f\|_{W^{l,p}(0,1)} = \left(\sum_{r \leqslant l} \|D^r f\|^p_{L^p(0,1)} \right)^{1/p}.$$

Proposition IV.1. *L'opérateur M_n défini sur $W^{l,p}(0, 1)$ est uniformément borné en n pour $p \geqslant 1$.*

Démonstration. Les fonctions $p_{n+r,k+r}$ pour $k \leqslant n-r$ ont des dérivées d'ordre $r' \leqslant r-1$ nulles en 0 et 1.

Donc l'expression de $(d^r/dx^r) M_n f$ obtenue quand $(d^r/dx^r) f$ est continue, est encore valable si la dérivée au sens des distributions $D^r f$ est définie, intégrable sur $(0, 1)$, c'est-à-dire:

$$\frac{d^r}{dx^r} M_n f(x) = \frac{(n+1)!\, n!}{(n-r)!\, (n+r)!} \sum_{k=0}^{n-r} p_{n-r,k}(x) \int_0^1 p_{n+r,k+r}(t)\, D^r f(t)\, dt.$$

Soit $f \in W^{l,p}(0, 1)$, si $r \leqslant l$, on a:

$$\begin{aligned} \left\| \frac{d^r}{dx^r} M_n f \right\|_{L^1(0,1)} &\leqslant \frac{(n+1)!\, n!}{(n-r+1)!\, (n+r)!} \|D^r f\|_{L^1(0,1)} \\ &\leqslant \|D^r f\|_{L^1(0,1)} \end{aligned}$$

car pour tout $t \in (0, 1)$, $\sum_{k=0}^{n-r} p_{n+r,k+r}(t) \leqslant 1$.

Pour $p > 1$, l'inégalité de Hölder donne:

$$\left| \int_0^1 p_{n+r,k+r}(t)\, D^r f(t)\, dt \right|$$
$$\leqslant \left(\int_0^1 p_{n+r,k+r}(t)\, dt \right)^{(p-1)/p} \left(\int_0^1 p_{n+r,k+r}(t)\, |D^r f(t)|^p\, dt \right)^{1/p}$$

la convexité de $t \to |t|^p$ entraîne alors:

$$\left\| \frac{d^r}{dx^r} M_n f \right\|_{L^p(0,1)}$$
$$\leqslant \frac{(n+1)!\, n!}{(n-r)!\, (n+r)!} \left(\int_0^1 \sum_{k=0}^{n-r} p_{n-r,k}(x) \right.$$
$$\left. \times \left(\int_0^1 p_{n+r,k+r}(t)\, D^r f(t)\, dt \right)^p \right)^{1/p}$$
$$\leqslant \frac{(n+1)!\, n!}{(n-r)!\, (n+r)!} \frac{1}{(n-r+1)^{1/p}} \frac{1}{(n+r+1)^{(p-1)/p}} \| D^r f \|_{L^p(0,1)}$$
$$\leqslant \| D^r f \|_{L^p(0,1)}$$

d'où $\|M_n f\|_{W^{l,p}(0,1)} \leqslant \|f\|_{W^{l,p}(0,1)}$ pour tout $p \geqslant 1$.

THÉORÈME IV.2. *Pour toute fonction $f \in W^{l,p}(0,1)$, la suite $M_n f$ converge vers f dans $W^{l,p}(0,1)$, $(p \geqslant 1)$.*

Démonstration. Dans le paragraphe II, nous avons montré que si ϕ admet une dérivée $(d^r/dx^r)\,\phi$ continue, la suite $(d^r/dx^r)\, M_n \phi$ converge uniformément vers ϕ.

Donc $M_n \phi$ converge vers ϕ dans $W^{r,p}(0,1)$ si $p \geqslant 1$. Nous raisonnons ensuite par densité. Soit $f \in W^{l,p}(0,1)$. Pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver ϕ indéfiniment dérivable, à support compact dans $]0,1[$ tel que $\|\phi - f\|_{W^{l,p}(0,1)} \leqslant \varepsilon$. On a

$$\|M_n f - f\|_{W^{l,p}(0,1)} \leqslant 2\, \|f - \phi\|_{W^{l,p}(0,1)} + \|M_n \phi - \phi\|_{W^{l,p}(0,1)}.$$

Il en résulte, pour tout $\varepsilon > 0$:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, \|M_n f - f\|_{W^{l,p}(0,1)} \leqslant 2\varepsilon$$

et la propriété de convergence de $M_n f$ vers f dans $W_{l,p}(0,1)$. Ce théorème et la Proposition IV.1 ont été démontrés par Durrmeyer [4].

PROPOSITION IV.3. *Une condition nécessaire et suffisante pour que la fonction f intégrable sur $(0, 1)$ soit dans $W^{l,p}(0, 1)$ est que la suite $\|M_n f\|_{W^{l,p}(0,1)}$ soit bornée, $(p > 1,\ l \geqslant 0)$.*

Démonstration. La condition est nécessaire d'après le Théorème IV.1. Montrons qu'elle est suffisante. Soit f intégrable sur $(0, 1)$ telle que $\|M_n f\|_{W^{l,p}(0,1)}$ soit bornée. Puisque la suite $M_n f$ converge vers f dans $L^1(0, 1)$, la suite $(d^r/dx^r)\, M_n f$ converge au sens des distributions vers $D^r f$ pour tout entier $r \leqslant l$. Raisonnons par densité pour montrer que $D^r f \in L^p(0, 1)$ pour $p > 1$ et $0 \leqslant r \leqslant l$.

L'inégalité suivante est vraie pour tout $g \in L^q(0, 1)$ si $1/p + 1/q = 1$, tout ϕ indéfiniment dérivable à support compact dans $]0, 1[$, tous entiers m et n et $r \leqslant l$:

$$\left| \int_0^1 \left(\frac{d^r}{dx^r} M_n f(x) - \frac{d^r}{dx^r} M_m f(x) \right) g(x)\, dx \right|$$
$$\leqslant \left(\left\| \frac{d^r}{dx^r} M_n f \right\|_{L^p} + \left\| \frac{d^r}{dx^r} M_m f \right\|_{L^p} \right) \| g - \phi \|_{L^q(0,1)}$$
$$+ \left| \int_0^1 \left(\frac{d^r}{dx^r} M_n f(x) - \frac{d^r}{dx^r} M_m f(x) \right) \phi(x)\, dx \right| .$$

Pour $\varepsilon > 0$ arbitraire, on peut choisir ϕ tel que $\| g - \phi \|_{L^q(0,1)} \leqslant \varepsilon$. La quantité ci-dessus est alors majorée par

$$2\varepsilon \sup_{n \in \mathbb{N}} \|M_n f\|_{W^{l,p}(0,1)} + \left| \int_0^1 \left(\frac{d^r}{dx^r} M_n f(x) - \frac{d^r}{dx^r} M_m f(x) \right) \phi(x)\, dx \right| .$$

On en déduit que la suite $(d^r/dx^r)\, M_n f$ converge faiblement dans $L^p(0, 1)$ si $r \leqslant l$ et donc sa limite $D^r f$ est dans $L^p(0, 1)$.

Remarque. Les résultats de Berens et De Vore [1] sur l'approximation dans $L^p(0, 1)$ de fonctions de $L^p(0, 1)$ à l'aide de suites d'opérateurs linéaires positifs permettent d'écrire pour tout $p \geqslant 1$ et pour tout $f \in L^p(0, 1)$:

$$\|M_n f - f\|_{L^p(0,1)} \leqslant C_p\, \omega_p(f, 1/\sqrt{n}),$$

où $\omega_p(f, \cdot)$ est le module de régularité dans L^p de f:

$$\omega_p(f, t) = \sup_{0 < u \leqslant t}\ \sup_{\substack{x \in [0,1] \\ x+u \in [0,1]}} \left(\int_0^1 |f(x+u) - f(x)|^p\, dx \right)^{1/p},$$

RÉFÉRENCES

1. H. BERENS ET A. DE VORE, Quantitative Theorems for L_p-Spaces, *in* "Approximation Theory II" (G. G. Lorentz, ed.), pp. 289–298, Academic Press, New York, 1976.
2. CHR. COATMELEC, Approximation et interpolation des fonctions différentiables de plusieurs variables, *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.* (1966), 271–341.
3. M. M. DERRIENNIC, Sur l'approximation des fonctions d'une ou plusieurs variables par des polynômes de Bernstein modifiés et application au problème des moments, Thèse de 3e cycle, Université de Rennes, 1978.
4. J. L. DURRMEYER, Une formule d'inversion de la transformée de Laplace: Applications à la théorie des moments, Thèse de 3e cycle, Faculté des Sciences de l'Université de Paris, 1967.
5. G. G. LORENTZ, "Bernstein Polynomials," Univ. of Toronto Press, Toronto, 1953.
6. O. SHISHA ET B. MOND, The degree of convergence of sequences of linear positive operators, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* **60** (1968), 1196–1200.
7. A. F. TIMAN, "Theory of Approximation of Functions of a Real Variable," Hindustan Publishing Corporation (1966).
8. E. VORONOWSKAJA, Détermination de la forme asymptotique d'approximation des fonctions par des polynômes de Bernstein, *C. R. Acad. Sci. URSS* (1932), 79–85.